TEXTS

CONCOURS EXTERNE DE TECHNICIEN DE POLICE TECHNIQUE ET SCIENTIFIQUE DE LA POLICE NATIONALE

SESSION 2014

TRAITEMENT DU SIGNAL

Épreuve écrite de connaissance
se rapportant à la spécialité choisie

Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient : 2

Il vous appartient de vous assurer que le sujet en votre possession comporte la totalité des pages (10 pages).

Il vous est demandé de répondre avec clarté à chaque question, sur votre feuille de composition (coin gommé).

- *Calculatrice scientifique ou graphique autorisée*
- *Un formulaire est présent en annexe à la fin du sujet*

Sous peine d'annulation de leur épreuve, les candidats ne devront faire apparaître **aucun signe ou mention** pouvant permettre l'identification des copies et intercalaires.

Exercice 1 : Questions – Théorie du signal (3 points)

1. Que signifie la bande passante à -3 db, justifiez votre ou vos réponses choisies dans la liste suivante :
   a) La fréquence à partir de laquelle la puissance du signal est divisée par 2.
   b) La fréquence à partir de laquelle l'amplitude du signal est divisée par $\sqrt{2}$.
   c) La fréquence à partir de laquelle l'amplitude du signal est divisée par 10.

2. Expliquer l'effet Doppler.

3. Dessiner le spectre en fréquence d'un signal sinusoïdal de fréquence 4kHz et d'amplitude 3V.

4. Le bel représente t-il une échelle linéaire ou logarithmique ?

5. Que représente la fonction d'auto-corrélation d'un signal au point 0 dans les cas suivants :
   a) pour un signal à puissance finie ;
   b) pour un signal à énergie finie.

Soit l'équation de récurrence d'un filtre numérique $y[n]=\sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot x[n-i]+\sum_{i=1}^{M-1} b_i \cdot y[n-i]$.

6. Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?

7. Quel composant faut-il utiliser pour pouvoir traiter de façon numérique des signaux analogiques grâce à un processeur. ? Quelles sont les caractéristiques principales de ces circuits ?

8. Quelle condition impose le théorème de Shannon sur la fréquence d'échantillonnage d'un signal ?

9. Comment s'interprète la transformée de Fourier d'un signal ?

10. Que représente un rapport signal sur bruit en db inférieur à zéro ?

Exercice 2 : Métrologie – Étalonnage d'un capteur (3 points)

On réalise une sonde de température à partir d'un capteur de température bas coût. Cette sonde délivre une tension V_{mes} qui est fonction de la température T (exprimée en °C) à laquelle elle est soumise. Pour étalonner cette sonde, on la place dans une enceinte thermostatée dont on fait varier la température entre 0°C et 100°C. Celle-ci est mesurée à l'aide d'une sonde thermométrique Pt100 de précision. On réalise ainsi un étalonnage indirect pour lequel on considère que la température donnée par la sonde Pt100 est parfaitement exacte. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

T(°C)	3,35	17,66	31,83	39,86	47,19	59,59	64,10	77,33	82,82	91,76
V_{mes} (mV)	26	168	328	390	476	583	594	754	799	878

1. Quel est le mesurande du problème ?
2. Quelle est l'étendue de mesure du capteur ?

Sur l'étendue de mesure, on cherche à modéliser le comportement de la sonde par une approximation linéaire $V_{mes}(T)=V_{mes0}+\alpha T$. On va donc estimer les deux paramètres du modèle V_{mes0} et α .

3. A l'aide de votre calculatrice, calculer les valeurs numériques de V_{mes0} et α en effectuant une régression linéaire en utilisant les valeurs dans le tableau précédent (cf. formulaire).
4. On rappelle que la sensibilité d'un capteur au point de fonctionnement T_0 , notée $s(T_0)$, est donnée par la relation suivante :

$$s(T_0)=\{\frac{dV_{mes}}{dT}\}_{T=T_0} .$$

   Quelle est la sensibilité du capteur sur l'étendue de mesure ?
5. Donner l'erreur maximale du capteur dans le cas de ces mesures.

Exercice 3 : Corrélation – Mesure de distance par télémètre (6 points)

On utilise un télémètre qui émet un signal vers un obstacle d , on note $x(t)$ le signal émis. L'obstacle réfléchit une partie du signal qui revient vers le télémètre, on note $y(t)$ ce signal de retour. Le signal a une célérité (vitesse) notée c et lors de sa propagation dans le milieu considéré il subit une atténuation α .

On souhaite déterminer la distance entre le télémètre et l'obstacle, pour cela on met en œuvre un calcul par corrélation. Pour éviter les ambiguïtés sur l'écho mesuré on utilise une impulsion, c'est-à-dire un signal de durée finie. Ici on va utiliser une porte commençant en 0, de durée T secondes et d'amplitude A .

1. Expliquer pourquoi la relation suivante $y(t)=\alpha\cdot x(t-r)$ permet de modéliser le problème ?
2. Vous détaillerez le lien entre r avec les données du problème $\{d,c,\alpha\}$.
3. Est-ce que le signal émis $x(t)$ est à énergie finie ou à puissance finie (cf formulaire) ?
4. Tracer la corrélation entre les signaux $x(t)$ et $y(t)$ (cf formulaire) dans le cas de $r=4T$.
5. Comment la corrélation peut fournir l'information sur la distance? Justifier votre réponse.

En pratique cette méthode est réalisée numériquement, c'est-à-dire que l'on manipule des signaux discrets $x[n]$ et $y[n]$ de taille N échantillons et à bande limitée dans $[-f_0;f_0]$.

6. Proposer une valeur pour la fréquence d'échantillonnage f_e .
7. Déterminer la distance maximale mesurable en fonction de N , f_e , T et c .
8. Réaliser un programme (en langage naturel ou en Matlab) pour mesurer la distance par un calcul de corrélation. On considère que les signaux $x[n]$ et $y[n]$ de taille N sont déjà présents dans les tableaux X et Y . Vous détaillerez au maximum les différentes étapes.

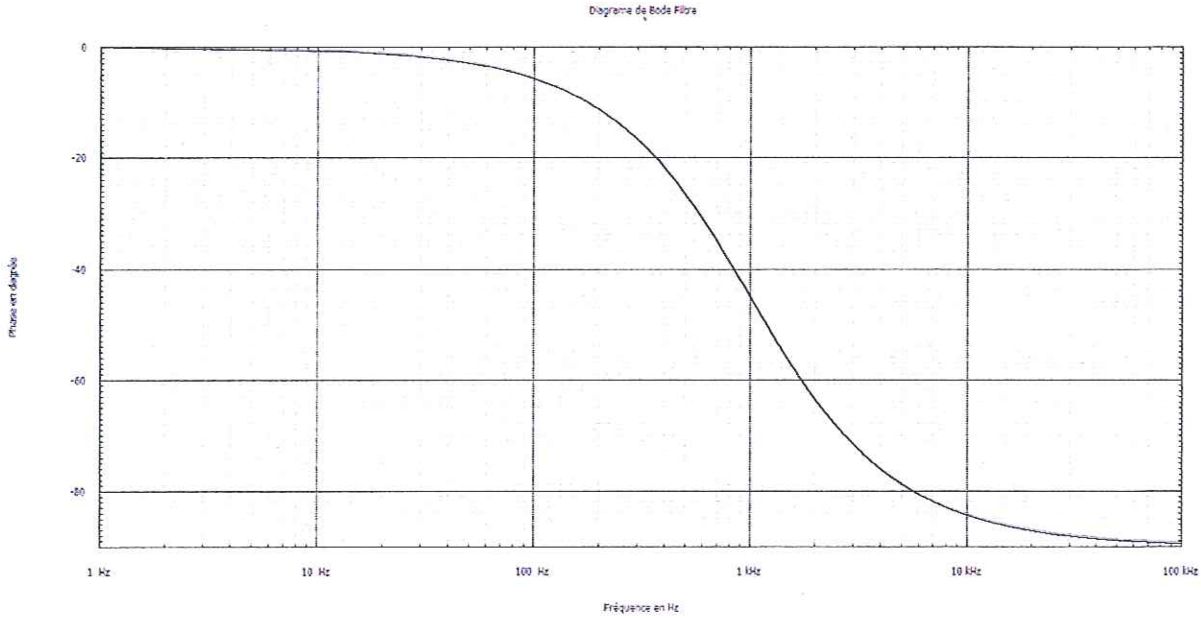
Exercice 4 : Filtrage – Analyse de filtres (3 points)

Un filtre passe-bas, noté F_b, du premier ordre possède une fréquence de coupure à -3 db de 1 kHz. Son gain à 100 Hz est de 20 dB.

1. Quelle est l'atténuation A_2 en tension de ce filtre à une fréquence de 50 kHz, 100 kHz , 200 kHz?

2. Quelle est l'atténuation A_1 en tension de ce filtre pour un signal sinusoïdal à la pulsation $\omega_1 = 6283{,}19 \quad rad/s$?

La rotation de phase du filtre (ou argument) utilisée est la suivante :



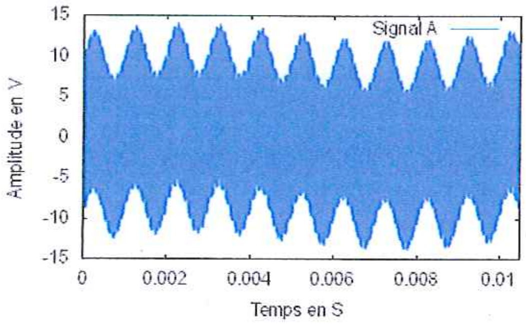
3. En utilisant le graphique ci-dessus, déterminer approximativement quelles sont les déphasages apportés par ce filtre à une fréquence de 100 Hz, 1 kHz et 100 kHz ?

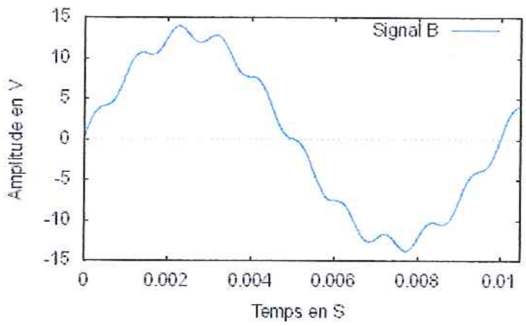
Soit le signal suivant :

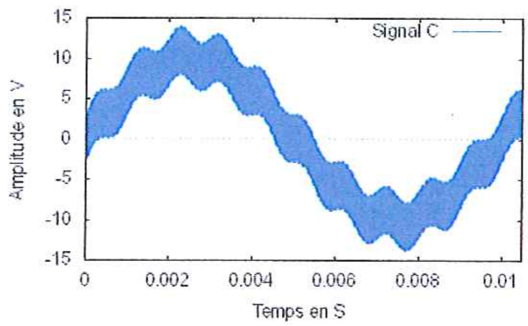
$$s_a(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) + C_3 \sin(\omega_3 \cdot t)$$
$$C_1 = 1V, C_2 = 3V, C_3 = 10V$$
$$\omega_1 = 628.32\, rad/s, \omega_2 = 6283.19\, rad/s, \omega_3 = 628319\, rad/s$$

4. Quelle partie du signal est prépondérante : le fondamental, l'harmonique 10 ou l'harmonique 1000 ?

Voici 3 tracés temporels A, B et C :







5. A quel tracé A, B ou C correspond le signal $s_a(t)$. Justifiez votre réponse.

Le signal $s_a(t)$ est appliqué en entrée du filtre F_b. Le signal en sortie du filtre est noté $s_s(t)$.

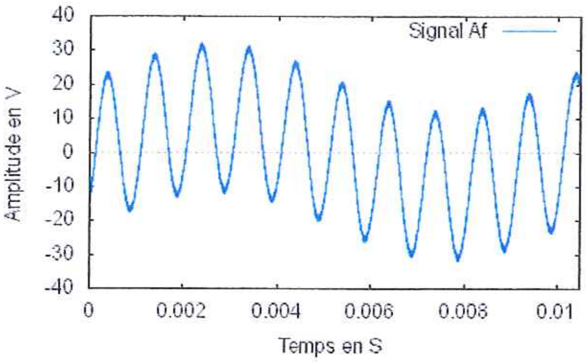
6. Expliquer pourquoi l'équation du signal $s_s(t)$ aura la forme suivante :
$$s_s(t)=A_{p1}\cdot\sin(\omega_1\cdot t+\varphi_1)+A_{p2}\cdot\sin(\omega_2\cdot t+\varphi_2)+A_{p3}\sin(\omega_3\cdot t+\varphi_3) \quad .$$

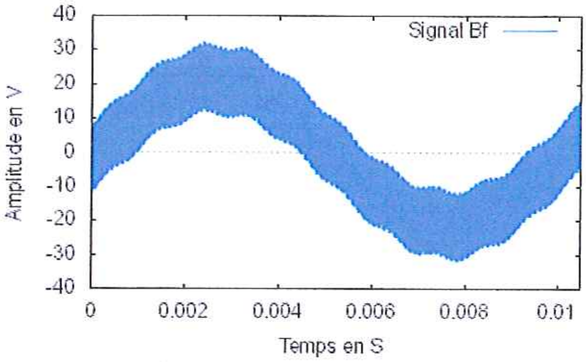
7. En fonction de vos réponses aux questions précédentes déterminer les valeurs de A_{p1}, A_{p2} et A_{p3}.

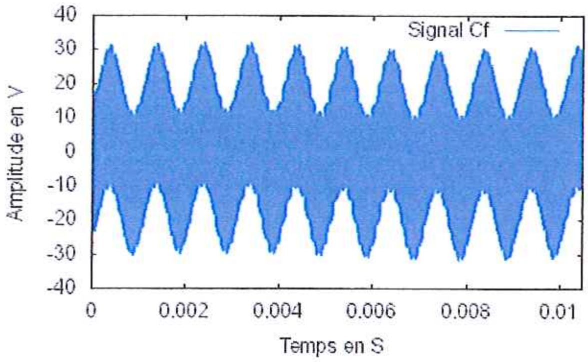
8. Le signal fondamental est-il prépondérant, sinon quel est l'harmonique prépondérant ?

9. En fonction de vos réponses aux questions précédentes donner une valeur approchée pour $\varphi_1, \varphi_2\, et\, \varphi_3$.

Voici 3 tracés temporels Af, Bf et Cf :







10. A quel tracé ci-dessus Af, Bf ou Cf, correspond au mieux le signal de sortie $s_s(t)$? Justifiez votre réponse.

Les signaux A_p, B_p et C_p ont été obtenus à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
A_p(t) &= A_{p1}\cdot\sin(\omega_1\cdot t+\varphi_1)+A_{p2}\cdot\sin(\omega_2\cdot t+\varphi_2)+A_{p3}\cdot\sin(\omega_3\cdot t+\varphi_3)\\
B_p(t) &= A_{p2}\cdot\sin(\omega_1\cdot t+\varphi_1)+A_{p3}\cdot\sin(\omega_2\cdot t+\varphi_2)+A_{p1}\cdot\sin(\omega_3\cdot t+\varphi_3)\\
C_p(t) &= A_{p3}\cdot\sin(\omega_1\cdot t+\varphi_1)+A_{p1}\cdot\sin(\omega_2\cdot t+\varphi_2)+A_{p2}\cdot\sin(\omega_3\cdot t+\varphi_3)
\end{aligned} .$$

11. Quel signal parmi A_p, B_p et C_p aura la puissance la plus importante ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5 : Transformée de Fourier (5 points)

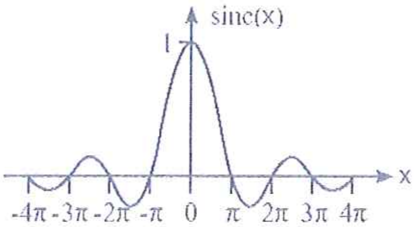
Soit le signal $p_T(t)$ qui est la fonction porte de largeur T. Elle est définie par la relation suivante :

$$p_T(t)=\begin{cases}1 \quad si \quad t\in[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}] \\ 0 \quad si \quad t\notin[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}]\end{cases} .$$

1. Démontrer que la transformée de Fourier du signal $p_T(t)$, notée $P_T(f)$, en utilisant la définition intégrale (cf formulaire) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_T(f)=T\cdot sinc(\pi f T) \quad \text{où} \quad sinc(x)=\frac{\sin(x)}{x} .$$

La fonction $sinc$ est le sinus cardinal qui est représenté sur la figure suivante :



2. Donner l'allure graphique de $P_T(f)$. Vous donnerez les valeurs des abscisses au niveau des passages par zéro.

On s'intéresse maintenant au signal $y(t)$ qui est une arche d'un cosinus modulée, définie par la relation suivante :

$$y(t)=p_T(t)[1+\cos(2\pi\frac{t}{T})]\cos(2\pi f_0 t)$$

3. Donner l'allure graphique de ce signal avec $f_0 \gg \frac{1}{T}$.
4. En exploitant les relations des propriétés de la transformée de Fourier données dans le formulaire, calculer la transformée de Fourier du signal $y(t)$, notée $Y(f)$.
5. Donner l'allure graphique de $Y(f)$.

Annexe 1 : Formulaire

Régression linéaire :

Les paramètres $\hat{a}, \hat{c}$ de l'équation de droite $\hat{y}=\hat{a}\cdot x+\hat{c}$ minimisant les erreurs de N mesures faites aux points x_i et ayant pour valeur y_i peuvent être déterminés comme suit :

Moyenne d'une série d'échantillons	Coefficient directeur $\hat{a}$
$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ et $\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$	$\hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}$
Équation de la droite	Valeur à l'origine $\hat{c}$
$\hat{y}=\hat{a}\cdot x+\hat{c}$	$\hat{c}=\bar{y}-\hat{a}\,\bar{x}$

Énergie et Puissance des signaux :

On définit l'énergie et la puissance d'un signal à temps continu $x(t)$ par les relations suivantes :

Énergie d'un signal	**Puissance d'un signal**
$E_x=\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$P_x=\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \lvert x(t)\rvert^2 dt$

Corrélation :

On note ici $c_{xy}(\tau)$ la corrélation entre deux signaux à temps continus $x(t)$ et $y(t)$ et par $c_{xy}[k]$ la corrélation entre deux signaux à temps discrets $x[n]$ et $y[n]$. La définition de la corrélation dépend également de la classe des signaux : énergie ou puissance finie.

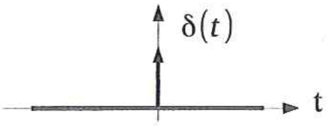
	Signaux continus	**Signaux discrets**
Signaux à énergie finie	$c_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y^*(t-\tau)\,dt$	$c_{xy}[k]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,y^*[n-k]$
Signaux à puissance finie	$c_{xy}(\tau)=\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,y^*(t-\tau)\,dt$	$c_{xy}[k]=\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} x[n]\,y^*[n-k]$

ici, u^* correspond au conjugué du nombre complexe u .

On note * le produit de convolution et il est défini par la relation suivante :

$$x*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)\,y(u)\,du$$

On note $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac et elle est représentée par la forme suivante :



Elle possède les propriétés suivantes :

- $\begin{cases} x(t)\cdot\delta(t-t_0)=x(t_0)\cdot\delta(t-t_0) \\ X(f)\cdot\delta(f-f_0)=X(f_0)\cdot\delta(f-f_0) \end{cases}$: opération de sélection ;

- $\begin{cases} x*\delta(t-t_0)=x(t-t_0) \\ X*\delta(f-f_0)=X(f-f_0) \end{cases}$: opération de translation ;

- $\begin{cases} x*\delta(t)=x(t) \\ X*\delta(f)=X(f) \end{cases}$: l'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution.

Si $X(f)$ est la transformée de Fourier du signal $x(t)$, on la note $X(f)=TF[x(t)]$.

- Définition intégrale de la transformée de Fourier :

$$X(f)=TF[x(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}\,dt \quad \text{où} \quad j \quad \text{est l'imaginaire pur.}$$

- Transformée de Fourier d'un cosinus :

$$TF[\cos(2\pi f_0 t)]=\frac{1}{2}(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))$$

- Transformée de Fourier du produit de deux signaux :

$$TF[g(t)\cdot h(t)]=G*H(f)$$

- Transformée de Fourier du produit de convolution de deux signaux :

$$TF[g*h(t)]=G(f)\cdot H(f)$$

- Transformée de Fourier d'un signal constant :

$$TF[1]=\delta(f)$$